ＭＢ　関数解析学　線形作用素の理論　講義報告[1]

２００８年9月２０日（土）　１４：００－１６：００

最初に、Banach空間 $E$ 上の有界線形作用素の Neumann 級数が収束するための条件を調べた。次に、Banach空間 $E$ に値をとる位相空間 $X$ 上の連続関数全体の空間 $C(X,E)$ にノルムを入れ、$C(X,E)$ がそのノルムに関して完備であることを証明した。最後に Banach空間 $E$ に値をとる閉区間 $I$ 上の有界な関数 $f$ の Riemann 積分を定義し、その性質について調べた。

# 1　線形作用素の理論

## 1.1　Banach空間 値写像の解析学

### 1.1.1　Neumann 級数

**練習問題 1.1.** $(E, \|\ \|)$ を *Banach*空間、$B(E)$ を $E$ 上の有界線形作用素の作る *Banach*環 とするとき、

1. $T \in B(E)$ が、$\|T\| < 1$ を満たすならば、$I - T \in B(E)$ は全単射でかつ、$(I-T)^{-1} \in B(E)$ で、

$$(I-T)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} T^{\nu} \tag{1}$$

$$\left\|(I-T)^{-1}\right\| \leq (1 - \|T\|)^{-1} \tag{2}$$

ただし、(1) の右辺は、絶対収束とする。この無限級数を ***Neumann* 級数**という。

2. $T \in B(E),\ \xi_0 \in \mathbb{C}$ が、$\|T\| < |\xi_0|$ を満たすならば、$\xi_0 I - T \in B(E)$ は全単射でかつ、$(\xi_0 I - T)^{-1} \in B(E)$ で、

$$(\xi_0 I - T)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\xi_0^{\nu+1}} T^{\nu} \tag{3}$$

ただし、(3) の右辺は、絶対収束とする。

### 1.1.2　Banach空間 値連続写像の若干の性質

**練習問題 1.2.** $X$ を位相空間、$E$ を $\mathbb{C}$ 上の *Banach*空間 とする。$C(X,E)$ を $X$ から $E$ への連続関数全体とするとき、

1. $f, g \in C(X,E),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in C(X,E)$

2. $f \in C(X,E) \Rightarrow \|f\| \in C(X,\mathbb{C})$　ただし、$\|f\|(x) = \|f(x)\|$ とする。

3. $\varphi \in E',\ f \in C(X,E) \Rightarrow \varphi \circ f \in C(X,\mathbb{C})$

[1]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

**練習問題 1.3.** $X$ をコンパクトな位相空間、$E$ を *Banach*空間 とする。$C(X,E)$ を $X$ から $E$ への連続関数全体とするとき、任意の $u \in C(X,E)$ に対して、

$$\|u\|_{E,X} = \sup\{\|u(x)\|_E \mid x \in E\}$$

と定義する。（$X$ のコンパクト性により、$\|u\|_{E,X}$ は $X$ 上で最大値をもつから、$\|u\|_{E,X} < \infty$ となる。）このとき、

1. $C(X,E) \ni u \to \|u\|_{E,X} \in \mathbb{R}$ は、$C(X,E)$ 上のノルムである。
2. $C(X,E)$ はノルム $\|\ \|_{E,X}$ に関して完備である。

**練習問題 1.4.** $X$ をコンパクトな距離空間、$E$ を *Banach*空間 とする。$C(X,E)$ を $X$ から $E$ への連続関数全体とするとき、$f \in C(X,E)$ ならば、$f$ は $X$ 上一様連続である。

### 1.1.3 閉区間上の Riemann 積分

$\Delta$ を閉区間 $I = [a,b]$ の分割

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

とし、分割 $\Delta$ の小区間 $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1,2,\cdots,n)$ における代表点を $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $\xi_k \in I_k$ $(k = 1,2,\cdots,n)$ とする。このとき、閉区間 $I$ の分割とその代表点の集合

$$\mathfrak{D} = \{(\Delta,\xi) \mid \Delta \text{ は } I \text{ の分割、} \xi \text{ は分割 } \Delta \text{ の代表点。}\}$$

に、（半）順序を次の様に定義する。$(\Delta_1,\xi_1),(\Delta_2,\xi_2) \in \mathfrak{D}$ に対して、

$$(\Delta_1,\xi_1) \prec (\Delta_2,\xi_2) \Leftrightarrow |\Delta_2| \leq |\Delta_1|$$

ただし、$|\Delta| = \max\{(t_k - t_{k-1}) \mid k = 1,2,\cdots n\}$ とする。

**練習問題 1.5.** $(\mathfrak{D},\prec)$ は有向集合になることを示せ。すなわち、

1. $(\Delta,\xi) \prec (\Delta,\xi) \quad \textit{for}\ \forall(\Delta,\xi) \in (\mathfrak{D},\prec)$
2. $(\Delta_1,\xi_1) \prec (\Delta_2,\xi_2),\ (\Delta_2,\xi_2) \prec (\Delta_3,\xi_3) \Rightarrow (\Delta_1,\xi_1) \prec (\Delta_3,\xi_3)$
3. 任意の $(\Delta_1,\xi_1),(\Delta_2,\xi_2) \in (\mathfrak{D},\prec)$ に対し、

   $$(\Delta_1,\xi_1) \prec (\Delta_3,\xi_3), \quad (\Delta_2,\xi_2) \prec (\Delta_3,\xi_3)$$

   を満たす $(\Delta_3,\xi_3) \in (\mathfrak{D},\prec)$ が存在する。

$E$ を Banach空間 とするとき、$E$ に値をとる $I$ 上の有界な関数 $f$ に対し、

$$R(f,\Delta,\xi) = \sum_{J\in\Delta} |J|\, f(\xi_J) \quad \text{for } \forall(\Delta,\xi) \in (\mathfrak{D},\prec)$$

と定義するとき、

$$\int_I f : \mathfrak{D} \ni (\Delta, \xi) \to R(f, \Delta, \xi) \in E$$

は、$E$ に値をとるネットになる。

ネット $\int_I f : \mathfrak{D} \to E$ が収束するとき、すなわち、

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \exists v_f \in E \quad \text{such that} \quad \|R(f, \Delta, \xi) - v_f\|_E < \varepsilon \quad \text{for } \forall \Delta \in \mathfrak{D} \text{ such that } |\Delta| < \delta$$

が成立するとき、$f$ は $I$ で **Riemann 積分可能**であるといい、ネット $\int_I f$ の収束値を $v_f = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ と記す。

**定理 1.1 (Riemann - Darbox の定理).** $E$ を *Banach*空間 とする。閉区間 $I = [a, b]$ から $E$ への関数 $f$ が $I$ 上で連続ならば、$f$ は $I$ で *Riemann* 積分可能である。

### 1.1.4 Riemann 積分の基本的な性質

**練習問題 1.6.** 任意の $f \in C(I, E)$ に対して、

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\|_E \leq \int_a^b \|f(t)\|_E \, dt$$

が成立する。

記録 by J.S